

1. Zwierzęta i liczby

Próbując zrozumieć źródła poznania matematyczne-go, musimy zacząć od pytań filo- i ontogenetycznych: kiedy i w jaki sposób zdolności matematyczne wzbogaciły arsenał umiejętności naszego gatunku? W którym momencie rozwoju osobniczego i na jakiej podstawie rozwijają się kompetencje matematyczne? Czy – jak zdaje się sugerować Stanislas Dehaene – rodzimy się z wykształconym w długim procesie ewolucji biologicznej „zmysłem liczby”, czy też nasza matematyka ma inne podstawy ewolucyjne? Jakiegokolwiek próby udzielenia odpowiedzi na te pytania należy zacząć od przeglądu naszej aktualnej wiedzy o numerycznych zdolnościach innych zwierząt, a następnie porównać te zdolności najpierw z kompetencjami, z którymi rodzą się ludzie, a potem z tym, w jaki sposób z tych wrodzonych kompetencji w toku ontogenezy kształtują się zdolności matematyczne.

Albert Einstein i Leopold Infeld zauważają:

Fakt, że kot reaguje w podobny sposób wobec każdej myszy, wykazuje, że tworzy on pojęcia i teorie, służące mu za drogowskazy w jego świecie wrażeń zmysłowych. „Trzy drzewa” to coś innego niż „dwa drzewa”. Z kolei „dwa drzewa” to nie to samo, co „dwa kamienie”. Pojęcia samych tylko liczb 2, 3, 4, uwolnionych od przedmiotów, z których powstały, są tworam i umysłu, opisującymi rzeczywistość naszego świata¹.

Uwaga ta zawiera ważną myśl: by zwierzęta mogły funkcjonować w świecie, potrzebują pewnych konkretnych zdolności numerycznych – muszą na przykład odróżniać dwa drzewa od trzech drzew. Einstein i Infeld podkreślają jednak, że choć zdolności takie muszą u zwierząt występować, nie mają one charakteru m a t e m a t y c z n e g o, gdyż matematyka nie dotyczy pojęć konkretnych (np. „dwa drzewa”), tylko abstrakcyjnych (pojęć „samych tylko liczb 2, 3, 4”). Jak jednak jest w rzeczywistości? Czy zwierzęta posiadają umiejętności matematyczne? Temu i podobnym pytaniom psycholodzy poświęcili dużo uwagi, ale droga do zrozumienia, w jaki sposób funkcjonują umysły zwierząt, była – i wciąż wydaje się, że jest – wyboista.

¹ A. Einstein, L. Infeld, *Ewolucja fizyki. Rozwój poglądów od najdawniejszych pojęć do teorii względności i kwantów*, przeł. R. Gajewski, Prószyński i S-ka, Warszawa 1998, s. 249.

Wilhelm von Osten był emerytowanym berlińskim nauczycielem matematyki, a także gorącym zwolennikiem darwinizmu. Pasjonował się zdolnościami zwierząt, a do historii przeszedł jako właściciel i trener Mądrego Hansa – rosyjskiego ogiera, który rzekomo przejawiał niespotykane zdolności poznawcze i komunikacyjne. Po kilku latach szkolenia Hansa von Osten nabrał przekonania, że niezwykle koń potrafi wskazać bieżącą datę, czytać, rozróżniać kolory, a nawet wykonywać operacje arytmetyczne i działania na ułamkach. Mądry Hans udzielał odpowiedzi na zadawane mu pytania, stukając kopytem lub wskazując nim litery na tablicy, a także kręcąc głową². Opinie na temat nadzwyczajnych uzdolnień Hansa były podzielone – jedni widzieli w nich przejaw rzeczywistej inteligencji zwierzęcia, zaś inni całą sprawę uważali za mistyfikację von Ostena. Wątpliwości miała rozwiązać specjalna komisja powołana w 1904 roku. W jej składzie znaleźli się psycholog, dyrektor zoo, weterynarz, a nawet kawalerzyści. Komisja nie dopatrzyła się oszustwa, jednak nie potwierdziła również nieprzeciętnych zdolności konia.

Jeden z członków komisji, psycholog z berlińskiego uniwersytetu Carl Stumpf, przeczuwał jednak, że „coś jest nie tak”, i polecił swojemu uczniowi, Oskarowi Pfungstowi, ponowne zbadanie sprawy³. Druga komisja, w której składzie znalazł się Pfungst, zebrała się trzy lata później. W starannie sporządzonym sprawozdaniu uczony kategorycznie zaprzeczył rzekomym nadzwyczajnym zdolnościom konia – uznał między innymi, że nie ma on przypisywanych mu talentów matematycznych. Pfungst przeprowadził badania w różnych sytuacjach eksperymentalnych: gdy Hans znajdował się (lub nie) w towarzystwie osób znających odpowiedzi na pytania, gdy pytania zadawał właściciel lub ktoś inny, gdy Hansowi zasłanianio oczy. Okazało się, że poprawność reakcji uzależniona była od podpowiedzi, jakich ludzie nieświadomie udzielali zwierzęciu – na przykład ruchami głowy sygnalizowali, kiedy Hans ma przestać stukać kopytem, by wynik operacji arytmetycznej był prawidłowy. Pfungst wyjaśniał „mądrość” Hansa nieświadomym uwarunkowaniem go za pomocą systemu nagród przez von Ostena, tak by zwracał uwagę na pewne ruchy ciała. Emerytowany nauczyciel matematyki, który był szczerze przekonany o nadzwyczajności swojego konia, nie okazał się świadomym oszustem (bardzo przeżył werdykt wydany przez Pfungsta), ale jego podopieczny nie przeszedł do historii jako pierwszy koń matematyk.

Czy Mądry Hans zasłużył na swój przydomek? Bez wątplenia – wyuczenie się skomplikowanych wzorców zachowań i reagowanie na odpowiednio zinterpretowane subtelne zachowania ludzi („mowę ciała”) to przecież przejawy inteligencji. Mądrość Hansa przejawiała się jednak w czymś innym, niż chciał tego von Osten: nie w zdolności do liczenia, ale w czymś, co można określić jako umiejętności społeczne. Bardziej interesujące jest jednak inne pytanie: czy

² Por. S. Savage-Rumbaugh, R. Lewin, *Kanzi. The Ape at the Brink of the Human Mind*, John Wiley & Sons, New York – Chichester – Brisbane – Toronto – Singapore 1994, s. 50.

³ Zob. S. Dehaene, *The Number Sense*, *op. cit.*, s. 4–6; M. Trojan, *Na tropie zwierzęcego umysłu*, Scholar, Warszawa 2013, s. 9–11.

„zdemaskowanie” Mądrego Hansa świadczy o tym, że zwierzęta (poza człowiekiem) pozbawione są kompetencji numerycznych? Nic bardziej błędnego.

Przypadek Hansa stał się impulsem do systematycznych badań nad zdolnościami numerycznymi zwierząt, prowadzonych przez psychologów i etologów. Uświadomił również naukowcom, jak dużą ostrożność należy zachować, by nie wpaść w pułapkę antropomorfizacji. Dziś książki i czasopisma naukowe pełne są świadectw rzeczywistych zdolności numerycznych u ptaków, szympansov, szczurów i wielu innych gatunków. Nie oznacza to jednak, że obserwowane u zwierząt wrodzone kompetencje numeryczne tożsame są ze zdolnościami arytmetycznymi, nie mówiąc już o „całej” matematyce⁴. O czym więc rozmawiamy, mówiąc o *kompetencjach numerycznych*? W literaturze zazwyczaj wymienia się w tym kontekście co najmniej trzy częściowo niezależne od siebie zdolności⁵. Są nimi:

- 1) szacowanie analogowe (estymacja), polegające na porównywaniu liczebności dwóch zbiorów w celu rozstrzygnięcia, który z nich jest większy. Szacowanie nie wymaga przeliczania – proces ten ma charakter przybliżony, co oznacza, że nie musi angażować „wyodrębnionych”, dokładnych reprezentacji liczb (czasem odróżnia się zdolność szacowania wielkości niedużych zbiorów od zdolności szacowania wielkości zbiorów o znacznej liczbie elementów);
- 2) subitacja (*subitizing*), polegająca na szybkiej i – w odróżnieniu od szacowania – precyzyjnej ocenie liczebności zbiorów zawierających niewiele elementów. Czasem subitację wiąże się z „intuicyjną” oceną liczebności;
- 3) liczenie, które w porównaniu z subitacją jest procesem bardziej czasochłonnym i angażującym dodatkowe zdolności poznawcze. Liczenie pozwala określić liczebność zbiorów z większą precyzją niż szacowanie i może dotyczyć zbiorów o dużej liczbie elementów.

Przyjrzyjmy się kilku eksperymentom z udziałem zwierząt, rzucającym nieco światła na każdą z wymienionych zdolności numerycznych. Zacznijmy od umiejętności szacowania przez naczelne inne niż człowiek. W jednym z klasycznych eksperymentów, przeprowadzonym przez Duane’a M. Rumbaugh, Sue Savage-Rumbaugh oraz Marka T. Hegla, dwóm szympansom prezentowano dwie tace⁶. Na

⁴ Zagadnieniu temu przyjrzymy się szczegółowo w rozdz. II i III.

⁵ Zob. H. Davis, R. Pérusse, *Numerical Competence in Animals: Definitional Issues, Current Evidence, and a New Research Agenda*, „Behavioral and Brain Sciences” 1988, 8, 4, s. 561–579; M. Trojan, *Na tropie zwierzęcego umysłu*, op. cit., s. 119–145; dalej omawiamy niektóre z eksperymentów opisanych w tej wszechstronnej monografii poświęconej zdolnościom poznawczym zwierząt.

⁶ Zob. D.M. Rumbaugh, S. Savage-Rumbaugh, M.T. Hegel, *Summation in the Chimpanzee* (Pan Troglodytes), „Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes” 1987, 13, 2, s. 107–115.

każdej z nich znajdował się stos kostek czekolady. Każdy z szympanów mógł wybrać jedną z tac i zjeść smakołyk. Aż w 90% przypadków zwierzęta wybierały tacę z większą ilością czekolady. Następne zadanie było bardziej skomplikowane. Na każdej z tac badacze ułożyli po dwa stosy kostek czekolady. Na jednej z nich pierwszy stos był znacząco większy niż drugi; na drugiej tacy kostek było w sumie więcej, ale stosy były podobnej wielkości. Szympany nie dały się nabrać i również w tym przypadku wybierały zwykle tacę z większą liczbą smakołyków.

Nowszy eksperyment przeprowadzono z udziałem orangutanów⁷. Josep Call badał ich zdolność do szacowania, porównywania oraz przeprowadzania działań na dwóch niewielkich zbiorach, zawierających od jednego do sześciu elementów. Przedmiotem pierwszego eksperymentu była kwestia, jak naczelne radzą sobie z wyborem większego spośród dwóch zbiorów. Zbiory te były prezentowane najpierw jednocześnie, a potem także kolejno. Dzięki temu w chwili wyboru orangutan musiał polegać na pamięci, a nie bezpośredniej percepcji wzrokowej. Okazało się, że małpy radzą sobie z tym zadaniem bardzo dobrze. Z kolei w drugim eksperymencie badano zdolność orangutanów do wyboru większego zbioru, po tym jak początkowy zbiór został powiększony lub zmniejszony. W tym przypadku wyniki nie były tak jednoznaczne, ale sugerowały, że orangutany są zdolne do umysłowego łączenia (choć już nie rozdzielania) wielkości. Zdaniem Calla świadczy to o tym, że orangutany korzystają z jakichś mechanizmów reprezentacji, by wybrać zbiór zawierający większą liczbę elementów.

Zdolność do szacowania może niewątpliwie znacznie ułatwić życie wielu organizmom w różnych środowiskach, dlatego nie dziwi, że dobór naturalny „wyposażył” umysły zwierząt w taką funkcję. Pozostaje jednak pytanie, czy wybór większego zbioru przedmiotów odbywa się dzięki działaniu pojedynczego mechanizmu estymacyjnego, czy też kilku mechanizmów percepcyjnych. Josep Call i Philippe Rochat⁸ sprawdzili, jak orangutany radzą sobie z wyborem większych objętości, na podstawie testu, który weryfikuje, czy badany potrafi zastosować zasadę zachowania ilości⁹. W jednym z eksperymentów wykorzystano przezroczyste pojemniki o różnych kształtach, w których podawano małpom sok. Za każdym razem orangutan miał wybrać jeden z dwóch pojemników, przy czym zawsze w jednym z nich było więcej soku niż w drugim. Orangutany w ponad 90% przypadków wybierały to naczynie, w którym było więcej soku, niezależnie od jego kształtu. Analizując ten i inne eksperymenty, w których sok – na oczach małp –

⁷ Zob. J. Call, *Estimating and Operating on Discrete Quantities in Orangutans* (Pongo pygmaeus), „Journal of Comparative Psychology” 2000, 114, 2, s. 136–147.

⁸ Zob. J. Call, Ph. Rochat, *Perceptual Strategies in the Estimation of Physical Quantities by Orangutans* (Pongo pygmaeus), „Journal of Comparative Psychology” 1997, 111, 4, s. 315–329.

⁹ Przebieg tego zadania z udziałem dzieci można zobaczyć, wpisując w wyszukiwarce YouTube „piagetian conservation task”.

przelewany był do innych pojemników, Call i Rochat zastanawiali się, jaką strategię kognitywną stosują orangutany przy wykonywaniu tego typu zadań: czy jest to bezpośrednie szacowanie objętości płynu w pojemniku niezależnie od jego kształtu, czy też wykorzystywanie czasowych i przestrzennych sygnałów pojawiających się przy przelewaniu płynu z jednego pojemnika do drugiego, czy może ustalenie, gdzie soku jest najwięcej, i śledzenie, do jakiego ostatecznie pojemnika ta porcja soku trafi. Okazało się, że jedynym spójnym wyjaśnieniem uzyskanych wyników jest uznanie, iż orangutany dysponują mechanizmem bezpośredniego szacowania objętości płynu w pojemniku. Nowsze badania Calla, przeprowadzone wraz z Danielem Hanusem, wskazują na to, że zdolność do szacowania rozwinęła się na podobnym poziomie także u innych naczelnych – szympanśów, bonobo oraz goryli¹⁰.

Nie tylko prymaty potrafią szacować. Zdolność ta wydaje się powszechna u kręgowców. Przykładowo, badania z udziałem gołębi i wron, w których miały one porównywać wizualne wzory przedstawiające różną liczbę elementów, wykazały, że ptaki te potrafią dość dobrze rozróżniać liczebność zbiorów. Okazało się również, że trafność odpowiedzi (udzielanych poprzez wciśnięcie odpowiedniego przycisku) spadała zarówno wówczas, gdy liczba porównywanych obiektów rosła, jak i wtedy, kiedy porównywane wielkości były bardziej do siebie zbliżone¹¹. Przypomnijmy, że szacowanie liczebności zbiorów odbywa się na drodze analogowej, co znaczy, że nie musi angażować precyzyjnych reprezentacji numerycznych, jakie obecne są na przykład w liczeniu. W związku z tym proces szacowania jest obarczony możliwością błędu. Wiele badań wskazuje, że precyzja szacowania zależy od stosunku liczby przedmiotów znajdujących się w porównywanych zbiorach; mechanizm ten opisywany jest przez prawo Webera – Fechnera, do którego powrócimy w dalszej części tego rozdziału.

Jeśli chodzi o subitację¹², czyli szybką (ła-cińskie *subitus* znaczy „nagły”) i precyzyjną ocenę liczebności niewielkich zbiorów, w literaturze można znaleźć bardzo dużo wyników eksperymentów behawioralnych świadczących o tym, że zdolność ta występuje nie tylko u ludzi, lecz także u innych zwierząt, oraz że jest

¹⁰ Zob. D. Hanus, J. Call, *Discrete Quantity Judgments in the Great Apes* (Pan paniscus, Pan troglodytes, Gorilla gorilla, Pongo pygmaeus): *The Effect of Presenting Whole Sets Versus Item-by-Item*, „Journal of Comparative Psychology” 2007, 121, 3, 241–249.

¹¹ Zob. J. Emmerton, A. Lohmann, J. Niemann, *Pigeons' Serial Ordering of Numerosity with Visual Arrays*, „Animal Learning and Behaviour” 1997, 25, s. 234–244; A.A. Smirnova, O.F. Lazereva, Z.A. Zorin, *Use of Number by Crows: Investigation by Matching and Oddity Learning*, „Journal of Experimental Analysis of Behavior” 2000, 73, s. 115–122.

¹² Termin *subitizing* nie doczekał się dobrego polskiego odpowiednika; mimo pewnych oporów korzystamy z dość niezgrabnej kalki językowej („subitacja”).

ona czymś innym niż liczenie¹³. Badania tej umiejętności prowadzone są na osobnikach wyuczonych liczb, reprezentowanych słownie (liczebniki) – w przypadku papug – lub graficznie (symbole) – w przypadku naczelnych innych niż człowiek. Dla przykładu: wyniki badań przeprowadzonych przez Irene M. Pepperberg oraz Jesse’ego D. Gordona¹⁴ wskazują, że szara papuga afrykańska o imieniu Alex potrafiła natychmiast określać (w języku angielskim) liczebność, gdy prezentowanych było do sześciu elementów. Papuga radziła sobie dobrze zarówno wtedy, kiedy jej zadaniem było podanie liczby pewnej klasy obiektów znajdujących się w zróżnicowanym zestawie (np. ile jest niebieskich klocków?), jak i wtedy, kiedy miała podać łączną liczbę różnych elementów. W obydwu przypadkach liczba poprawnych odpowiedzi przekraczała 80%. Co więcej, papuga potrafiła odpowiednio zareagować, gdy w zestawie nie było żadnego elementu o określonych własnościach.

Z kolei zdolność do subitacji naczelnych była przedmiotem badań Tetsuro Matsuzawy i jego współpracowników, a uczestnikiem eksperymentów była szympanśca Ai¹⁵. Matsuzawa zaczął uczyć Ai liczb arabskich, gdy ta miała dziewięć lat. Po lewej stronie ekranu Ai widziała wzory złożone z kropek, zaś po prawej liczby, przy czym rozkład jednych i drugich był losowy. Szympanśca miała wskazać liczbę, która odnosi się do prezentowanych kropek. Ai dobrze opanowała to zadanie, a ponadto nauczyła się określać liczbę, kolor oraz rodzaj obiektu w 300 próbkach. Matsuzawa zaznacza, że Ai radziła sobie najlepiej w przypadku dwóch sekwencji: kolor, przedmiot i liczba oraz przedmiot, kolor i liczba.

Przyjrzyjmy się teraz zdolności zwierząt do liczenia¹⁶. By sprawdzić, czy zwierzęta korzystają jedynie z umiejętności subitacji, czy też potrafią liczyć, należy odpowiednio skracać lub wydłużać czas ekspozycji bodźców. Im jest on dłuższy, tym bardziej zwierzęta skłonne są do wielokrotnego spoglądania na prezentowane wzory, co może wskazywać na wykorzystanie rudymentarnej formy liczenia („protoliczenia”). Należy jednak pamiętać, że granica między liczeniem a subitacją – w szczególności gdy bada się je opisaną metodą – może być płynna.

¹³ Zob. M. Trojan, *Na tropie zwierzęcego umysłu*, *op. cit.*, s. 127–130; tam też można znaleźć niezwykle obszerną bibliografię.

¹⁴ Zob. I.M. Pepperberg, J.D. Gordon, *Numerical Comprehension by a Grey Parrot (Psittacus erithacus), Including a Zero-Like Concept*, „Journal of Comparative Psychology” 2005, 119, s. 197–209.

¹⁵ Zob. T. Matsuzawa, *Use of Numbers by a Chimpanzee*, „Nature” 1985, 315, s. 57–59; T. Matsuzawa, T. Asano, K.K. Kubota, K. Murofushi, *Acquisition and Generalization of Numerical Labeling by a Chimpanzee*, [w:] *Current Perspectives in Primate Dynamics*, red. D.M. Taub, F.A. King, Von Nostrand Reinhold, New York 1986, s. 416–430.

¹⁶ Zob. M. Trojan, *Na tropie zwierzęcego umysłu*, *op. cit.*, s. 130–144.

Zdolność do rudymentarnych form liczenia badana była na bardzo wielu gatunkach zwierząt. Na przykład w klasycznych eksperymentach przeprowadzonych latach pięćdziesiątych XX wieku przez Ottona Koehlera badano, czy kruki potrafią liczyć kropki w przedziale od 1 do 7¹⁷. Krukowi prezentowano najpierw na kartce papieru wzór złożony z kropek, a następnie miały one odnaleźć pokrywkę od garnka, na której widniała taka sama liczba kropek. Kropki na papierze i na pokrywkach układały się w różne wzory przestrzenne. Udzielenie poprawnej odpowiedzi wiązało się z gratyfikacją w postaci smakołyku. Poprawność odpowiedzi była bardzo duża, mimo że wzory oraz wielkość kropek były ciągle zmieniane. Koehler twierdził, że za uzyskane wyniki odpowiedzialny jest zmysł wizualno-przestrzenny. W wypadku tego eksperymentu trudno jednak rozstrzygnąć, czy kruki korzystały z liczenia, czy raczej z subitacji. W innym klasycznym badaniu zdolności do liczenia u ptaków, aby otrzymać nagrodę, gołębie uderzały przycisk dziobem. Jeśli zrobiły to odpowiednią liczbę razy, dostawały smakołyk¹⁸. Patki szybko nauczyły się sprawnie wykonywać to zadanie. W tym wypadku rodzi się jednak kolejny problem interpretacyjny: czy tego typu zdolności, oparte na warunkowaniu instrumentalnym, można utożsamiać z liczeniem?

Mniejsze wątpliwości można mieć w przypadku zdolności do liczenia u naczelnych innych niż człowiek. W badaniach przeprowadzonych przez Sarę Boysen oraz Gary'ego Berntsona¹⁹ sprawdzano, czy szympansy podczas obliczeń korzystają z reprezentacji numerycznych. Okazało się, że małpy te potrafią również dobrze prowadzić obliczenia (sumować) zarówno na fizycznych przedmiotach, jak i na liczbach arabskich w zakresie od 1 do 4. Przed szympansem stawiano tacę, nad którą znajdowały się trzy miseczki²⁰. Na tacy naukowcy kładli przedmiot, zaś na miseczkach od 1 do 3 przedmiotów. Szympansy warunkowane były w ten sposób, że jeśli wskazały miseczkę z liczbą smakołyków, która odpowiadała ich liczbie na tacy, otrzymywały nagrodę w postaci pożywienia. Gdy szympansy nauczyły się już dobrze tego przyporządkowania, przedmiot na jednym ze spodeczków został zastąpiony przez kartkę papieru, na której zapisano arabską cyfrę 1. Szympansy miały się nauczyć, że jednemu przedmiotowi na tacy odpowiada cyfra 1. Gdy opanowały to zadanie, dwa przedmioty na innym spodeczku zostały podmienione na

¹⁷ Zob. O. Koehler, *Thinking without Words*, [w:] *Proceedings of the 14th International Congress of Zoology*, Danish Science P., Copenhagen 1956.

¹⁸ Zob. W. Arndt, *Abschliessende Versuche zur Frage des „Zähl“-Vermogen der Haustaube*, „*Zeitschrift für Tierpsychologie*” 1939, 3, s. 88–142.

¹⁹ Zob. S.T. Boysen, G.G. Berntson, *Numerical Competence in a Chimpanzee (Pan troglodytes)*, „*Journal of Comparative Psychology*” 1989, 103, 1, s. 23–31.

²⁰ Zob. S.T. Boysen, *Counting in Chimpanzees: Nonhuman Principles and Emergent Properties of Number*, [w:] *The Development of Numerical Competence*, red. S.T. Boysen, E.J. Capaldi, Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey 1993.

kartkę z cyfrą 2. Analogicznie postąpiono z cyfrą 3 oraz wprowadzono cyfrę 4. Gdy szympany nauczyły się już graficznych reprezentacji liczb, próbowano nauczyć je rozwiązywania zadań numerycznych. W klatkach małp umieszczono trzy schowki, w których mogły się znajdować pomarańcze. Po zajrzeniu do schowka szympan miał wskazać jedną z cyfr. Otrzymywał nagrodę, jeśli wskazana cyfra odpowiadała sumie pomarańczy znajdujących się we wszystkich schowkach. W dalszej części eksperymentu pomarańcze zostały zastąpione kartkami z zapisanymi na nich cyframi. Szympany miały zsumować liczby i wskazać cyfrę z odpowiednim wynikiem. Trafność udzielanych przez nie odpowiedzi wynosiła około 70%.

Można z tego wnosić, że szympany są zdolne do opanowania kardynalnego aspektu liczby (np. potrafią przyporządkować trzy pomarańcze do cyfry 3). Bardziej zaawansowana zdolność liczenia wymaga jednak jeszcze opanowania aspektu porządkowego, który pozwala na rozumienie hierarchii następujących po sobie liczb. Przykład wspomnianej już szympanicy Ai świadczy o tym, że i tę zdolność – przynajmniej w rudymenarnej formie – potrafią opanować naczelnie inne niż człowiek²¹. Proces treningu był bardzo prosty. Szympanicy pokazywano na ekranie cyfrę 1. Dotykając jej, małpa otrzymywała nagrodę. Następnie na ekranie w przypadkowej kolejności pojawiały się 1 i 2. Nagradzane było dotknięcie cyfr w odpowiedniej kolejności, czyli najpierw 1, a potem 2. Później wprowadzono kolejne cyfry, aż do 9. Po odpowiednim treningu Ai całkiem dobrze radziła sobie z porządkiem liczb (ok. 80% poprawnych odpowiedzi).

Omówione wyżej eksperymenty pokazują, że zdolność do szacowania oraz subitacji jest czymś powszechnym w królestwie zwierząt. Z kolei liczenie wywołuje znacznie więcej kontrowersji. Choć ptaki dysponują niewątpliwie zdolnościami numerycznymi, trudno jednoznacznie stwierdzić, czy potrafią one liczyć w tym samym sensie co na przykład szympany, nie mówiąc już o ludziach. Wydaje się, że porównania zdolności poznawczych ludzi i innych zwierząt nie wspierają jednoznacznie tezy, że zwierzęta są zdolne do liczenia. Można się spierać nawet o to, czy umiejętności opanowane przez szympanicę Ai można określić mianem „liczenia”. Trzeba przecież zauważyć, że jest to „liczenie” w bardzo ograniczonym zakresie, a przy tym będące wynikiem długotrwałego treningu zaordynowanego przez ludzi. Szympany żyjące w środowisku naturalnym nie wykazują się (ani nawet nie mają okazji się wykazać) umiejętnością liczenia. Mówiąc ogólniej, choć istnienie zdolności numerycznych u zwierząt jest niewątpliwym faktem, trudno ustalić, jak mają się one do ludzkich umiejętności matematycznych. Jak słusznie zauważają Zhanna Reznikova i Boris Ryabko, „wciąż brakuje nam odpowiedniego «języka» analizy porównawczej”²².

²¹ Zob. D. Biro, T. Matsuzawa, *Chimpanzee Numerical Competence*, [w:] *Primate Origins of Human Cognition and Behavior*, red. T. Matsuzawa, Springer, Tokyo 2008, s. 199–224.

²² Z. Reznikova, B. Ryabko, *Numerical Competence in Animals, with an Insight from Ants*, „Behaviour” 2011, 148, s. 406.

Prowadzi to do jeszcze innego problemu: czy na pewno psycholodzy, etolodzy i kognitywiści odrobili wspomnianą przez nas na początku tego rozdziału lekcję wypływającą z historii Mądrego Hansa? Być może nasze szczytne zamiary prowadzą nas na manowce tak jak Wilhelma von Ostena? Choć standardy metodologiczne chronią nas dziś przed wieloma błędami, pokusa antropomorfizacji jest wielka – być może czasem za bardzo chcemy przypisać zwierzętom zdolności matematyczne obserwowane u ludzi. Einstein i Infeld – w przywoływanej wyżej wypowiedzi – mają zapewne rację, uczulając na różnicę pomiędzy konkretnymi, praktycznymi zdolnościami numerycznymi a abstrakcyjnym liczeniem.