Bartosz Brożek
Mateusz Hohol

Czy matematyka jest normatywna?[1]

Zagadka normatywności

O normatywności mówi się przeważnie w kontekście etyki, prawa oraz języka. W przypadku etyki i prawa pojęcie normatywności pojawia się w różnych wcieleniach, odnoszących się do pytania o to, jak wyjaśnić preskryptywny charakter norm etycznych bądź prawnych[2]. Z kolei w przypadku języka problematyka normatywności uwikłana jest w dyskusje na temat znaczenia[3]. Rzadziej – co nie znaczy, że

---

[1] W niniejszym studium rozwijamy idee zaprezentowane m.in. w pracach: B. Brożek, *Neuroscience and Mathematics. From Inborn Skills to Cantor's Paradise*, [w:] *Between Philosophy and Science*, red. M. Heller, B. Brożek, Ł. Kurek, Copernicus Center Press, Kraków 2013, s. 69–117; B. Brożek, *Rule-Following. From Imitation to the Normative Mind*, Copernicus Center Press, Kraków 2013; M. Hohol, *The Normativity of Mathematics. A Neurocognitive Approach*, [w:] *The Many Faces of Normativity*, red. J. Stelmach, B. Brożek, M. Hohol, Copernicus Center Press, Kraków 2013, s. 191–222; M. Hohol, *Matematyczność ucieleśniona*, [w:] *Oblicza racjonalności. Wokół myśli Michała Hellera*, red. B. Brożek, J. Mączka, W.P. Grygiel, M. Hohol, Copernicus Center Press, Kraków 2011, s. 143–166.

[2] Por. D. Hume, *Traktat o naturze ludzkiej*, przeł. Cz. Znamierowski, Aletheia, Warszawa 2005; G.E. Moore, *Zasady etyki*, przeł. Cz. Znamierowski, De Agostini, Warszawa 2003, rozdz. 1, §10; a także: J. Stelmach, *And if There is No 'Ought'?*, [w:] *Studies in the Philosophy of Law 6. The Normativity of Law*, red. J. Stelmach, B. Brożek, Copernicus Center Press, Kraków 2011, s. 15–20 oraz J. Stelmach, *Naturalistic and Antinaturalistic Fallacies in Normative Discourse*, [w:] *The Many Faces of Normativity*, *op. cit.*

[3] Por. S. Kripke, *Wittgenstein o regułach i języku prywatnym*, przeł. K. Posłajko, L. Wroński, Aletheia, Warszawa 2007; P. Pagin, *Rules of Meaning and Practical Reasoning*, „Synthese" 1999, 117, s. 207–227; K. Glüer, Å. Wikforss, *Against Content Normativity*, „Mind" 2009, 118, s. 31–70; B. Brożek, *The Normativity of Meaning*, [w:] *The Many Faces of Normativity*, *op. cit.*, s. 147–176; A. Shaw, *Spór o normatywność znaczenia. Ujęcie perspektywiczne*, w niniejszym tomie.

wcale – mówi się natomiast o normatywności logiki i matematyki. Problemowi normatywności tej ostatniej dyscypliny poświęcony jest niniejszy esej. Choć w przypadku różnych dziedzin, takich jak język, moralność czy matematyka, pojęcie normatywności nabiera różnych odcieni znaczeniowych, można wskazać dla nich pewną wspólną podstawę, którą określać będziemy jako normatywność rudymentarną. Naszym zdaniem teza ta wspierana jest przez teorie wypracowane w ramach jednego z wiodących paradygmatów neuronauki poznawczej, jakim jest *embodied-embedded mind*, czyli umysł ucieleśniony i osadzony w kulturze oraz interakcjach społecznych[4].

Pojęcie normatywności – choć w ostatnich latach bardzo modne w filozofii – trudno jest zdefiniować. Pojawiają się rozmaite próby jego określenia. Dla przykładu mówi się, że normatywność jest cechą pytań i twierdzeń dotyczących tego, co *powinniśmy* czynić; że reguła postępowania jest normatywna, jeśli „ma wpływ na nasze zachowanie"[5]; albo że reguła postępowania jest normatywna, jeśli stanowi obiektywną rację działania[6]. Nie jest naszym celem próba wypracowania w pełni akceptowanej definicji normatywności. Przyjmujemy natomiast roboczo, iż pewna reguła postępowania jest normatywna, jeśli jest obiektywna (to znaczy nie zależy od przekonań jednostki) i może służyć do uzasadnienia (usprawiedliwienia) jakiegoś działania lub przekonania[7].

Trzeba wobec tego zapytać, czy w matematyce występują reguły, którym można by przypisać tak rozumianą normatywność. Da się przecież bronić tezy, że twierdzenia matematyczne są *opisami pewnych abstrakcyjnych faktów.* Na przykład „reguła" przemienności do-

---

[4] Zob. M. Hohol, *Wyjaśnić umysł. Struktura teorii neurokognitywnych*, Copernicus Center Press, Kraków 2013 (omówienie roli paradygmatów neuronauki poznawczej, w tym także *embodied-embedded mind,* znaleźć można w rozdziale trzecim).

[5] Zob. przegląd definicji normatywności w pracy S. Delacroix, *Legal Norms and Normativity. An Essay in Genealogy*, Hart Publishing, Oxford 2006.

[6] Zob. Ch. Korsgaard, *The Sources of Normativity*, „Tanner Lectures on Human Values" 1994, http://www.tannerlectures.utah.edu/lectures/documents/korsgaard94.pdf.

[7] Obronę takiego stanowiska czytelnik znaleźć może w pracy: B. Brożek *Rule-Following. From Imitation to the Normative Mind*, Copernicus Center Press, Kraków 2013.

dawania $a+b = b+a$ opisuje pewną cechę dodawania, ale nie jest regułą *sensu stricto*. Choć takie ujęcie problemu wydaje się dopuszczalne, można też mówić o istnieniu reguł w matematyce, i to przynajmniej w dwóch sensach. Po pierwsze, można za Wittgensteinem zauważyć, że przeprowadzanie operacji matematycznych jest czynnością, której uczymy się poprzez trening; uczymy się pewnej *techniki* dodawania, odejmowania, dowodzenia twierdzeń matematycznych itd. Mówiąc inaczej, umiejętności matematyczne sprowadzają się do wyćwiczenia całego arsenału odpowiednich reguł postępowania w obliczu problemu (zadania) matematycznego. W paragrafie 189 *Dociekań filozoficznych* Wittgenstein pisze, że: „przez wychowanie (ćwiczenie) doprowadza się ludzi do takiego stosowania wzoru $y = x^2$, że ktokolwiek z nich wstawi za x tę samą liczbę, ten wyliczy też zawsze tę samą liczbę dla y”[8].

Po drugie, można mówić o regułach matematycznych w bardziej wyrafinowanym sensie. Rozważmy dowolny system aksjomatyczny. Składa się on z dwóch elementów: aksjomatów oraz reguł inferencji. Aby dowieść twierdzenia matematycznego, trzeba pokazać, że twierdzenie to otrzymać można z aksjomatów poprzez transformacje dokonane z użyciem reguł inferencji. A zatem podmiot matematyczny – to jest podmiot zdolny do rozumowania matematycznego – kieruje się regułami. Dawid Hilbert w swych wykładach z 1905 roku pod tytułem *Logische Prinzipien des mathematisches Denkens*, sformułował „aksjomat myśli”, który nazywał też „aksjomatem istnienia inteligencji”:

> Mam zdolność do myślenia rzeczy (o rzeczach) i oznaczania ich z pomocą prostych symboli (a, b, : : : , X, Y , : : :) w tak doskonale określony sposób, że mogę zawsze jednoznacznie rozpoznać je ponownie; moja myśl dokonuje operacji na tych rzeczach z użyciem symbolizmu, zgodnie z dobrze określonymi prawami, i jestem zdolny do

[8] L. Wittgenstein, *Dociekania filozoficzne*, przeł. B. Wolniewicz, PWN, Warszawa 2008, § 189.

introspekcji (*Selbstbeobachtung*), która pozwala opisać te prawa w sposób zupełny[9].

Prawa manipulacji symbolami, o których mówi Hilbert, są niczym innym jak generalizacją idei reguł inferencyjnych. Dodajmy, że postępowanie zgodnie z rozumianymi w pewien sposób regułami jest istotne także w innych ujęciach matematyki: u Kanta (w którego koncepcji kluczową rolę odgrywają tak zwane schematy transcendentalne), w intuicjonizmie Brouwera (gdzie mowa o regułach konstrukcji obiektów matematycznych) czy w koncepcji maszyny Turinga (która działa zgodnie z pewnymi instrukcjami). Można zatem bronić tezy, że mówienie o kierowaniu się regułami w matematyce to nie jedynie swoisty *façon de parler*, ale w pełni uzasadniony sposób wyrażania się zarówno w odniesieniu do prostych operacji matematycznych (takich jak dodawanie liczb naturalnych), jak i złożonych, abstrakcyjnych struktur matematycznych (takich jak systemy aksjomatyczne). Czy jednak można zasadnie mówić, że reguły te mają charakter normatywny? By odpowiedzieć na to pytanie, przyjrzyjmy się najpierw dwóm klasycznym filozofiom matematyki: platonizmowi i formalizmowi.

1. Normatywność w klasycznych koncepcjach matematyki

1.1. Platonizm

Zaryzykować można stwierdzenie, że statystycznie najczęściej spotykanym wśród matematyków stanowiskiem filozoficznym jest platonizm[10]. Poszczególni zwolennicy platonizmu różnią się jednak, jeśli idzie o szczegółowe rozstrzygnięcia, dlatego trudno jest podać jego

[9] Cyt. za: A. Olszewski, *Teza Churcha. Kontekst historyczno-filozoficzny*, Monografie Centrum Kopernika, Universitas, Kraków 2009, s. 71.

[10] Zob. R. Hersh, *On Platonism*, „European Mathematical Society Newsletter” 2007, 64, s. 24–25.

jednoznaczną charakterystykę[11]. Zamiast próbować konstruować „definicję esencjalną" platonizmu, lepiej przyjrzeć się mu na zasadzie „podobieństw rodzinnych". Przykładowo Kurt Gödel – jeden z najsłynniejszych dwudziestowiecznych platoników – podkreślał *realność* obiektów matematycznych i ich *niezależność* od działań matematyków. Zauważał on, że:

> Klasy i pojęcia mogą być pojmowane jako rzeczywiste przedmioty, mianowicie klasy – jako „wielości rzeczy" lub jako struktury składające się z wielości rzeczy, a pojęcia – jako własności i relacje między rzeczami istniejącymi niezależnie od naszych definicji i konstrukcji. Wydaje mi się, że przyjęcie [istnienia] takich przedmiotów jest tak samo uzasadnione, jak przyjęcie ciał fizycznych[12].

O realności obiektów matematycznych świadczyć ma cały szereg faktów, w tym przede wszystkim *stabilność* i *pewność* matematycznych wynikań. W tym kontekście warto przytoczyć słowa Alaina Connesa, laureata Medalu Fieldsa, a zarazem jednego z twórców geometrii nieprzemiennych:

> Myślę, że jestem całkiem blisko stanowiska realistycznego. Na przykład liczby pierwsze – o czym jestem w pełni przekonany – stanowią rzeczywistość bardziej stabilną, niż otaczająca nas rzeczywistość materialna. Matematyka porównać można do odkrywcy, który wybiera się w niezbadane rejony świata[13].

Ze stabilnością matematyki kontrastuje *zmienność* świata fizycznego. Stąd też zapewne bierze się skłonność do określania obiektów

---

[11] Zob. M. Balaguer, *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Oxford University Press, NY-Oxford 1998.

[12] K. Gödel, *Logika matematyczna Russella*, [w:] *Współczesna filozofia matematyki*, przekł. i red. R. Murawski, PWN, Warszawa 2002, s. 89.

[13] J.-P. Changeux, A. Connes, *Conversations on Mind, Matter and Mathematics*, przeł. M.B. DeBovoise, Princeton University Press, Princeton-New Jersey 1995, s. 12.

matematycznych jako *abstrakcyjnych*, czyli *pozaczasowych* i *niezależnych* od świata fizycznego. Nadmienić należy jednak, że nie wszyscy matematycy, którzy określają się jako platonicy, wierzą w istnienie takiego „platońskiego uniwersum obiektów abstrakcyjnych".

Alain Connes podkreśla jeszcze jedną istotną cechę matematyki, która uznawana jest przez większość platoników:

> Prawda lematu Euklidesa dotyczącego liczb pierwszych nie zależy od takiego czy innego sposobu postrzegania. Choć jest prawdą, że matematyka wykorzystywana jest jako język w innych naukach, sprowadzanie jej do samego języka byłoby poważnym błędem[14].

Dla platoników, matematyka – choć okazuje się niezwykle skuteczna w opisie zjawisk fizycznych – nie daje się zredukować do języka, w jakim spisana jest księga natury. Większość z nich wierzy, że abstrakcyjne obiekty matematyczne istnieją realnie – nie stanowią naszych konstrukcji – i są od nas niezależne. Co ciekawe, tak rozumiana matematyka musi być *niezależna* od jakiejkolwiek pozamatematycznej konceptualizacji świata, a w szczególności od języka, którym się porozumiewamy. Tę niezależność matematyki od ludzkich zdolności językowych podkreśla wielu platoników, powołując się chętnie na dane empiryczne, takie jak opisane przez Alison Gopnik i współpracowników genetyczne upośledzenia mowy, które połączone są z występowaniem ponadprzeciętnych zdolności matematycznych u dotkniętych nimi ludzi[15]. Przykładem często podawanym w tym kontekście jest Albert Einstein, który w dzieciństwie cierpiał na dyslalię, czyli zaburzenie w przyswajaniu i prawidłowej artykulacji mowy.

W związku z tym jednym z największych wyzwań platonizmu matematycznego jest odpowiedź na pytanie, *w jaki sposób poznajemy obiekty matematyczne*. Typowa odpowiedź brzmi: poprzez *in-*

---

[14] *Ibidem*, s. 22.

[15] Zob. A. Gopnik, A.N. Meltzoff, P.K. Kuhl, *The Scientist in the Crib. What Early Learning Tells Us About the Mind*, Harper Paperbacks, New York 2000, rozdz. 4.

tuicję intelektualną, którą określić można też jako *wgląd matematyczny*. Problem polega na tym, że zdolność ta jest co najmniej równie tajemnicza, jak samo uniwersum abstrakcyjnych, realnie istniejących obiektów matematycznych.

Trudności z intuicją matematyczną są jednym ze źródeł poważnego argumentu sformułowanego przez Paula Benacerrafa przeciw silnej wersji platonizmu matematycznego. Przyjmując kauzalną teorię wiedzy Alvina Goldmana[16], powiemy, że warunkiem koniecznym zaistnienia wiedzy *X*-a o zdarzeniu (fakcie) *Y* jest związek przyczynowo-skutkowy pomiędzy przekonaniem *X*-a a zdarzeniem (faktem) *Y*. Benacerraf zauważył, że zaistnienie takiego związku przyczynowego pomiędzy obiektami z abstrakcyjnego uniwersum platońskiego a konkretnymi, czyli ucieleśnionymi, matematykami jest niemożliwe. Mówiąc ogólniej, zdaniem Benacerrafa w platonizmie matematycznym nie jest możliwe pogodzenie ludzkich zdolności kognitywnych z przedmiotem wiedzy[17].

Oczywiście argument ten można próbować podważyć na różne sposoby[18]. Jedną z możliwości jest odrzucenie tak silnej wersji platonizmu – co w istocie czyni wielu matematyków i filozofów matematyki – i przyjęcie słabszego stanowiska, na przykład platonizmu fizykalistycznego, który w odniesieniu do teorii mnogości zaproponowała Penelope Maddy[19], eliminując kłopotliwą intuicję intelektualną na rzecz dowartościowania zwykłej percepcji zmysłowej. Zdaniem Maddy możemy postrzegać empirycznie tylko elementy skończonych – i nielicznych – zbiorów, zaś zbiory bardziej skomplikowane traktujemy jako *obiekty postulowane przez teorię*. Nie wiadomo do końca, czy stanowisko to jest jeszcze platonizmem, czy też raczej uznać

[16] Zob. P. Benacerraf, *Mathematical Truth*, [w:] *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, red. P. Benacerraf, H. Putnam, Cambridge University Press, Cambridge 1983, s. 403–420.
[17] Zob. A. Goldman, *A Casual Theory of Knowing*, „Journal of Philosophy" 1967, 64, s. 357–372.
[18] Zob. M. Balaguer, *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, *op. cit.*, s. 24-47.
[19] Zob. P. Maddy, *Physicalistic Platonism*, [w:] *Physicalism in Mathematics*, red. A.D. Irvine, Kluwer, Dordrecht 1990, s. 259–289.

należy je za pewną formę arystotelizmu. Kwestie taksonomiczne nie stanowią tu jednak większego problemu, choćby z tego powodu, że Maddy wierzy w rzeczywiste istnienie obiektów postulowanych przez teorie matematyczne – jej stanowisko jest więc niewątpliwie pewną wersją realizmu matematycznego.

Wypada wobec tego zapytać, czy matematyka w ujęciu platoników może być normatywna. *Prima facie* odpowiedź jest negatywna. Skoro wedle platoników rzeczywistość matematyki jest od nas niezależna, a teorie matematyczne stanowią jedynie *opis* tej rzeczywistości, nie ma tu miejsca na reguły, którym przypisać można by siłę normatywną. Nienormatywny charakter matematyki rozumianej po platońsku wzmacnia jeszcze postulat, zgodnie z którym poznanie matematyczne ma charakter wglądu czy też intuicji intelektualnej. W swych uwagach rozsianych w *Dociekaniach filozoficznych* Wittgenstein podkreśla, że nie sposób wyjaśnić fenomenu kierowania się regułą, jeśli przyjmie się kartezjański model myślenia–jako–widzenia[20]. Gdyby reguły były „obrazami mentalnymi" – albo obiektami abstrakcyjnymi – trudno byłoby zrozumieć, w jaki sposób mogą one kierować naszym postępowaniem. Pełnokrwisty platonizm nie pozostawia zatem miejsca dla normatywności matematyki, może z wyjątkiem trywialnej obserwacji, że na rozmaite metody (techniki) matematyczne można spojrzeć jak na zbiory instrukcji postępowania (na przykład przy dowodzeniu twierdzeń), a zatem jak na reguły mówiące, co matematyk *powinien* robić, by rozwiązać określony problem matematyczny. Takie techniczne reguły nie są jednak *istotą* matematyki rozumianej po platońsku – są w gruncie rzeczy czymś wtórnym, a ich prawomocność gwarantowana jest poprzez istnienie abstrakcyjnych, niezależnych od nas struktur matematycznych. Sytuacja przypomina więc pytanie o normatywność fizyki: owszem, istnieją różne techniki

[20] Por. B. Brożek, R. Zyzik, *Wittgenstein o regułach*, „Logos i Ethos" 2008, 24, 1, s. 15; kognitywną analizę modelu myślenia–jako–widzenia znaleźć można w pracy: G. Lakoff, M. Johnson, *Philosophy in the Flesh*, Basic Books, New York 1999, s. 238–240.

(zbiory instrukcji) rozwiązywania problemów fizycznych, ale nie należą one do *istoty* teorii fizycznej, a jednie do jej „technicznego tła”.

1.2. Formalizm

Formalizm trudno uznać za „doktrynę filozoficzną”, taką jak na przykład platonizm. Stanowi on raczej zaproponowany przez Davida Hilberta program badawczy, którego wynikiem miało być ugruntowanie matematyki i usprawiedliwienie niektórych jej twierdzeń. Nie można zaprzeczyć jednak, że formalizm odwołuje się do wyraźnych rozstrzygnięć filozoficznych[21]. W kwestii ontologii matematyki powszechnie uważa się, że nawiązuje on do nominalizmu, zaś w kwestii epistemologii i koncepcji podmiotu matematycznego – do kantyzmu.

Podstawowe postulaty programu Hilberta, który jest zapewne najpełniejszym wyrazem idei formalizmu (jeśli nie wręcz jego *alter ego*), streścić można następująco. Po pierwsze, Hilbert zamierzał zachować całą matematykę, włącznie z jej częścią niekonstruktywną. Po drugie, z tym postulatem ściśle związana była inna idea Hilberta, którą najdobitniej wyraził w 1900 roku w Paryżu: „dla matematyków nie ma żadnego *ignorabimus*”. Tę myśl spuentował w słynnym wywiadzie radiowym z 1930 roku stwierdzeniem: „Musimy wiedzieć! – Będziemy wiedzieć!” Wypowiedź tę potraktować można jako drugi postulat programu Hilberta: można podać dowód wszelkich twierdzeń matematycznych. Po trzecie, Hilbert dostrzegał jednak problemy związane z dowodami niekonstruktywistycznymi. Redukcyjny dowód niesprzeczności matematyki, sprowadzający ją do teorii mnogości, natrafia na przeszkody, gdyż teoria mnogości jest uwikłana w różne paradoksy (na przykład paradoks Russella). Skoro tak, to – póki nie dostarczy się zadowalającego dowodu niesprzeczności arytmetyki – nie będzie można ufać dowodom niekonstruktywnym.

---

[21] Zob. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, PWN, Warszawa 2001, s. 124–136; 173–203.

W związku z tym w matematyce trzeba stosować „bezpieczne" metody finitystyczne. Richard Zach przedstawia następującą definicję: „Finityzm to pogląd metodologiczny, który sprowadza się do ograniczenia myśli matematycznej do tych przedmiotów, które są »intuicyjnie« obecne jako doświadczane bezpośrednio przed wszelką myślą', a także do takich operacji oraz metod rozumowania o tych obiektach, które nie wymagają wprowadzania pojęć abstrakcyjnych, a w szczególności odwołania się do nieskończoności"[22]. Jak pisze z kolei sam Hilbert:

> Jako warunek wstępny stosowania wnioskowań logicznych i wykonywania operacji logicznych dane jest już coś intuicyjnie: pewne pozalogiczne konkretne obiekty, które jawią się jako doświadczane bezpośrednio przed wszelkim myśleniem (…). W szczególności w matematyce przedmiotem naszych rozważań są konkretne znaki, których kształt (…) jest bezpośrednio jasny i rozpoznawalny[23].

Hilbert wskazuje zatem, że finitystycznymi obiektami są znaki: konkretne i doświadczane bezpośrednio. Tego typu wypowiedzi Hilberta dają asumpt do obiegowej opinii, że matematyka rozumiana formalistycznie to gra pozbawionych znaczenia symboli. Pamiętać należy jednak, że w oryginalnej Hilbertowskiej wersji, formalistyczne ujęcie matematyki jest zabiegiem o charakterze *heurystycznym* i *metodologicznym*, a nie *ontologicznym*[24]. Choć omawiany problem jest wciąż przedmiotem żywych sporów, wydaje się, że – wbrew typowym interpretacjom – z matematyki w ujęciu Hilberta nie można *całkowicie* wyeliminować elementu semantycznego (co stanowi ważną

---

[22] R. Zach, *Hilbert's Program*, [w:] *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, red. E. Zalta, Stanford 2003, <http://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/>.

[23] D. Hilbert, *O nieskończoności*, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, red. R. Murawski, UAM, Poznań 1994, s. 297.

[24] Dla ścisłości dodać należy jednak, że istnieją również zaangażowane ontologicznie wersje formalizmu, które rzeczywiście traktują matematykę jako naukę o pozbawionych znaczenia symbolach; zob. H.B. Curry, *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam 1951.

kwestię ontologiczną). Spójrzmy na następującą rekonstrukcję Programu Hilberta:

> (ETAP 1) Identyfikacja niebudzącej wątpliwości, finitystycznej części matematyki realnej (treściowej).
> (ETAP 2) Formalizacja tej części matematyki.
> (ETAP 3) Zbudowanie odpowiedniego systemu formalnego (aksjomatów i reguł inferencyjnych), z których da się zrekonstruować finitystyczna część matematyki. Sformalizowana matematyka treściowa pełni w tym procesie funkcję heurystyczną; można zatem powiedzieć, że na tym etapie aksjomaty traktowane są „treściowo".
> (ETAP 4) Potraktowanie skonstruowanego systemu formalnego jako zbioru skończonych znaków.
> (ETAP 5) Dowody niesprzeczności, zupełności i rozstrzygalności systemu formalnego. Dowody te przeprowadzane są w metamatematyce, która jest finitystyczna i treściowa (operuje się tu na skończonych znakach).
> (ETAP 6) Metamatematyczna (treściowa) ocena („interpretacja") twierdzeń wygenerowanych przez system formalny. Udowodniona wcześniej niesprzeczność tego systemu gwarantuje prawdziwość uzyskanych twierdzeń[25].

Upraszczając nieco, można zatem powiedzieć, że praktyka formalizmu jest trójpoziomowa:

- *Pierwszy poziom*: „kodowanie" odpowiednich części matematyki – ustalanie aksjomatów i reguł inferencji – ma charakter *semantyczny* (*treściowy*).
- *Drugi poziom*: podczas mechanicznego przeprowadzania obliczeń i dowodzenia twierdzeń w ramach systemu aksjomatycznego wszystkie symbole traktowane są jako *pozbawione*

[25] A. Olszewski, *Teza Churcha…*, *op. cit.*, s. 65; B. Brożek, A. Olszewski, *Podmiot matematyczny Hilberta*artykuł ukaże się w czasopiśmie „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce".

treści (*formalne*). Poprawność otrzymanych wyników ma być gwarantowana przez niesprzeczność, zupełność i rozstrzygalność systemu formalnego.
- *Trzeci poziom*: wyniki otrzymane podczas obliczeń podlegają *interpretacji*. Poziom ten ma zatem charakter *semantyczny* (*treściowy*).

Formalistyczna matematyka traktowana jest więc jako „gra pozbawionych znaczenia symboli" tylko na poziomie drugim. Jeszcze raz podkreślić należy zatem, że formalizm jest rozstrzygnięciem o charakterze metodologicznym i heurystycznym, a nie ontologicznym.

A co z normatywnością? Czy matematyka widziana oczami formalistów jest normatywna? Nawet jeśli na poziomie drugim – „wolnej gry symboli" – poznanie matematyczne porównać można z funkcjonowaniem maszyny, a zatem pewnego mechanizmu, którego działania nie da się opisać w kategoriach normatywnych, etapy pierwszy i trzeci takiemu opisowi już się nie poddają. Podmiot matematyczny – to jest podmiot zdolny do wykonywania operacji matematycznych – potrafi:

(P1) Identyfikować i reidentyfikować znaki.
(P2) Manipulować znakami.
(P3) Stosować reguły (manipulacji znakami).
(P4) Reaplikować reguły (potencjalnie wiele razy).
(P5) Postrzegać treściowo finitystyczne przedmioty matematyczne.
(P6) Przyporządkować tym przedmiotom znaki, a także „odkodować" te przedmioty ze znaków.

Hilbertowski podmiot matematyczny – odgrywający *kluczową, definicyjną rolę* w formalistycznej wizji matematyki – posługuje się więc pewnymi *regułami*. Zapytać zatem należy, czy reguły te mają charakter normatywny, to jest czy mogą służyć do *uzasadnienia* działania lub przekonania. Odpowiedź wydaje się pozytywna. Reguły, którymi operuje podmiot transcendentalny są normatywne w sensie kategorycznym, gdzie *X* jest kategorycznie normatywne wtedy i tylko wtedy, gdy ludzie powinni wierzyć lub uczynić *Y* ze względu na *X* w dowolnych okolicznościach[26].

2. Normatywność z punktu widzenia neuronauki poznawczej

2.1. Korzenie normatywności

Aby wyjaśnić, w jaki sposób mówić można o normatywności matematyki, proponujemy wyjść od następującej teorii normatywności *tout court*[27]. Wyróżniamy dwa typy, czy też stopnie normatywności – normatywność rudymentarną oraz normatywność abstrakcyjną (lub normatywność *sensu stricto*) i – co za tym idzie – dwa rodzaje reguł: reguły rudymentarne i reguły abstrakcyjne (reguły *sensu stricto*). Kluczowa hipoteza, której bronimy, głosi, że reguły rudymentarne są filo- i ontogenetycznie uprzednie wobec reguł abstrakcyjnych.

Przyjrzyjmy się następującej, naszym zdaniem, głębokiej uwadze Wittgensteina:

> Wyobraźmy sobie ludzi, którzy uczą się mnożyć tylko po to, by określać wagę. Przykładają pręty pomiarowe do boków równoległościanów, odczytują długość z pręta, mnożą i stwierdzają, jaka jest liczba gramów, które zrównoważą przedmiot na wadze. Używają mnożenia tyko w tym celu, a w innych sprawach są ignorantami – nie potrafią dodawać, dzielić, ani wykonywać jakichkolwiek obliczeń matematycznych.

---

[26] Definicję tę sformułował Robert Hanna w pracy *Rationality of Logic*, The MIT Press, Cambridge-London 2006. Taki sam wniosek odnośnie do normatywności matematyki można – *mutatis mutandis* – sformułować w przypadku intuicjonizmu, dlatego nie opisujemy bliżej tego stanowiska filozoficznego.

[27] Teoria ta przedstawiona jest szczegółowo w książkach B. Brożka, *Normatywność prawa*, Wolters Kluwer, Warszawa 2012 oraz *Rule-Followong*..., *op. cit.*

> Przypuśćmy, że nie potrafią nawet liczyć. W tym, co robimy, zawsze izolujemy rachunki (*calculuses*)[28].

Takie działanie tylko z trudem określić można jako wykonywanie operacji matematycznych. Powiemy raczej, że ludzie z przykładu Wittgensteina robią to, co zwykle robi się w ich społeczności w danych okolicznościach. Matematyka – spójny system twierdzeń i metod ich dowodzenia – niewątpliwie ma swe źródła w tego typu działaniach. Mówiąc inaczej, matematyka – jako ów spójny system twierdzeń dotyczących związków arytmetycznych, algebraicznych i geometrycznych, czy, szerzej, struktur – powstać musiała przez wyizolowanie pewnych aspektów takich rudymentarnych reguł społecznych, które opisuje Wittgenstein. To samo powiedzieć można jednak o innych spójnych systemach reguł, na przykład o moralności lub języku.

Można zatem mówić o istnieniu filo- i ontogenetycznie wcześniejszych reguł rudymentarnych oraz będących efektem wyizolowania pewnych ich aspektów – reguł abstrakcyjnych. Reguły rudymentarne scharakteryzować można jako:

> (a) niezależne od języka – w pełni rozwinięty język, czyli pewien system składający się z dobrze określonego słownika i reguł gramatycznych, ewolucyjnie i logicznie zależy od istnienia reguł rudymentarnych;
> (b) proste i konkretne – reguły rudymentarne dotyczyć muszą relatywnie prostych i konkretnych zachowań;
> (c) normatywnie zunifikowane – reguł rudymentarnych nie można dzielić na rodzaje – nie istnieją rudymentarne reguły matematyczne, językowe czy moralne; inaczej mówiąc – reguły rudymentarne są wieloaspektowe – to jest dotyczą jakiegoś zachowania jako całości, a nie jego aspektów, oraz non-modalne – mówią, „co się robi" w danych okolicznościach, ale nie zawierają opera-

[28] L. Wittgenstein, *Lectures on the Foundations of Mathematics*, University of Chicago Press, Chicago 1975, s. 40.

torów deontycznych, takich jak „nakazane”, „zakazane” czy „dozwolone”.

Takie właśnie są reguły, do których stosują się ludzie z przykładu Wittgensteina – niezależne od języka (w tym sensie, że ich istnienie nie jest zależne od wyrażenia ich w języku), proste i konkretne oraz normatywnie zunifikowane, to jest wieloaspektowe (można założyć, że ludzie ci powtarzają zawsze tę samą czynność pomiaru i nie zdają sobie sprawy, że jakiś inny sposób pomiaru mógłby dać ten sam wynik) i non-modalne (ludzie ci robią, to „co robi się zwykle”, ale nie uważają swoich działań za nakazane bądź dozwolone).

Z kolei reguły abstrakcyjne (reguły *sensu stricto*) zależą od istnienia reguł rudymentarnych. Bez rudymentarnej formy kierowania się regułami trudno byłoby wyobrazić sobie, jak reguły *sensu stricto* są możliwe. Gdyby nie istnienie reguł rudymentarnych, nasze złożone formy „abstrakcyjnego” kierowania się regułą byłyby rodzajem cudu – nasze systemy normatywne, takie jak język, moralność czy prawo, stanowiłyby ewolucyjną zagadkę, osiągnięcie tak unikalne i jakościowo różne od „kultury” innych naczelnych, że jakakolwiek próba jego wyjaśnienia byłaby skazana na porażkę.

Reguły abstrakcyjne powstały poprzez refleksję nad rudymentarnymi formami kierowania się regułą. W przeciwieństwie do reguł rudymentarnych:

(a) zależą od języka (to jest muszą być wyrażone w języku);
(b) mogą być złożone (odnosić się do całych kompleksów zachowań) i ogólne (odnosić się do ogólnie określonych, a nie konkretnych zachowań);
(c) normatywnie zróżnicowane (to jest można je dzielić na rodzaje: językowe, moralne, prawne, prudencjalne itd.).

Normatywne zróżnicowanie reguł abstrakcyjnych bierze się z faktu, że język – w którym reguły abstrakcyjne są wyrażane – pozwala na aspektualizację i modalizację wzorów zachowania; mówiąc inaczej, język pozwala na wyizolowanie pewnych aspektów zachowań (na przykład matematycznych, moralnych czy prawnych), a także wyróżnienie nakazów, zakazów i dozwoleń.

Jak wspomnieliśmy, regułom rudymentarnym i abstrakcyjnym przypisać można, odpowiednio, rudymentarną i abstrakcyjną formę normatywności. Reguły rudymentarne – choć nie mogą służyć do *uzasadnienia* zachowania – są obiektywne (niezależne od przekonań jednostki) i – jako społecznie podzielany wzorzec – stanowią standard zachowania w danej społeczności: gdy ktoś postąpi niezgodnie z regułą rudymentarną, spotyka się z negatywną reakcją społeczną i – na tej podstawie – może dokonać korekty swego zachowania. Reguły rudymentarne posiadają zatem zubożoną siłę normatywną (mówić tu można o proto-normatywności). Z kolei reguły abstrakcyjne – mogące być przedmiotem świadomej refleksji – mogą dostarczać uzasadnienia dla pewnych zachowań (na przykład odprowadzenia podatku, użycia słowa „bogaty" w odniesieniu do osoby bogatej, zamiany kolejności dodawanych liczb), jeśli *wybrana teoria racjonalności* tak dyktuje. Dla przykładu: zwolennicy ekonomicznej analizy prawa twierdzą, że reguły prawne – będące typem reguł abstrakcyjnych – uzasadniają pewne zachowanie, jeśli reguły te prowadzą do maksymalizacji bogactwa społecznego. Zasady moralne (też stanowiące rodzaj reguł abstrakcyjnych) mogą dostarczać uzasadnienia, jeśli są zgodne z imperatywem kategorycznym (w koncepcji racjonalności Kanta) lub wtedy, gdy prowadzą do maksymalizacji indywidualnej funkcji użyteczności (w niektórych wersjach utylitaryzmu). Normatywność reguł abstrakcyjnych jest zatem relatywna: to, czy dana reguła będzie miała „siłę normatywną", to jest będzie mogła służyć do uzasadnienia jakiegoś zachowania, zdeterminowane jest przez pewne wybrane kryterium racjonalności. Trzeba jednak dodać, że sensowność i zrozumiałość pojęcia normatywności abstrakcyjnej uzależniona jest od istnienia jej rudymentarnej formy. Reguły rudymentarne są obiektywne i wyznaczają standardy zachowania. Teoretyczna refleksja nad tym aspektem rudymentarnej formy reguł pozwala na sformułowanie rozmaitych kryteriów normatywnych: od poprawności (w języku), poprzez kryteria racjonalności (jak u Kanta czy w utylitaryzmie), aż – co dla nas najważniejsze – po kryteria, które określamy raczej jako deskryptywne, takie jak konieczność (reguły matematyczne uznać można, jak pisaliśmy wyżej, za wyrażające konieczne relacje między strukturami matematycznymi). Mówiąc inaczej, moralna reguła abstrakcyjna może dostarczać uzasadnienia dla jakiegoś zachowania, bo jest bezstronna lub prowadzi do maksymalizacji bogactwa; abstrakcyjna reguła językowa może uzasadniać użycie jakiegoś wyrażenia, gdyż „koduje" poprawny sposób mówienia; abstrakcyjna reguła matematyczna może uzasadniać pewne operacje matematyczne, gdyż opisuje pewne konieczne związki między strukturami matematycznymi. Kluczowe jest to, że wszystkie rodzaje kryteriów abstrakcyjnych – bezstronność, maksymalizacja bogactwa, poprawność czy konieczność – wyrastają z prymitywnej formy normatywności.

W dalszej części tego eseju spróbujemy pokazać, że zarysowana powyżej koncepcja normatywności znajduje wsparcie w teoriach należących do paradygmatu *embodied-embedded mind* wypracowanego w ramach neuronauki poznawczej.

2.2. Matematyka ucieleśniona

Od dawna wiadomo, że część zdolności matematycznych ma charakter wrodzony lub pojawia się we wczesnych miesiącach życia. Co więcej, niektóre z nich występują także u naczelnych innych niż ludzie (*non-human primates*), a nawet u ptaków. W tym kontekście psychologowie rozwojowi zaobserwowali między innymi następujące fakty. Już trzy, cztery dni po urodzeniu dzieci rozróżniają zbiory dwu- i trzyelementowe. Niewiele później zdolność ta rozszerza się na zbiory czteroelementowe. Czteromiesięczne dzieci wykazują zdolności proto-arytmetyczne. Rozumieją one, że $1 + 1 = 2$ oraz, że $2 – 1 = 1$. Niewiele później potrafią dostrzegać, że $1 + 2 = 3$ oraz, że $3 – 1 = 2$. Około siódmego miesiąca życia zaczynają dostrzegać ekwiwalencję pomiędzy małą liczbą bodźców wzrokowych i słuchowych[29]. Dodać należy, że w wieku czterech lat dzieci uczą się dodawać większe liczby, wspomagając się użyciem palców. Neuronalne korelaty prostych zdolności numerycznych znajdują się w strukturach dolnej kory ciemieniowej, szczególnie w zakręcie kątowym, który znajduje się w polu 39 Brodmanna (oczywiście także wiele innych obszarów korowych zaangażowanych jest w poznanie matematyczne). Generalizując, można stwierdzić, że małe dzieci wyposażone są w elementarną intuicję zbioru oraz zmysł liczby[30]. Pamiętać jednak należy, że zdolności te są wciąż bardzo ograniczone.

Sporym problemem, z jakim borykają się psychologowie, neuronaukowcy i filozofowie matematyki, jest pytanie, w jaki sposób dzieci „przekraczają Rubikon", który dzieli opisane powyżej zdolności proto-matematyczne i *pełnokrwistą* matematykę. Pojawiają się różne spekulacje, ale – naszym zdaniem – najbardziej wiarygodna koncepcja głosi, że przejście do bardziej zaawansowanych zdolności matematycznych dokonuje się za sprawą języka[31].

Jedną z najbardziej rozbudowanych propozycji wyjaśnienia, jak język i związany z nim układ pojęciowy pozwalają na przejście od proto-matematyki do pełnokrwistej matematyki, jest teoria *embodied cognitive science of mathematics* zaproponowana w książce *Where Mathematics Comes From* przez George'a Lakoffa i Rafaela Núñeza[32]. Uczeni ci budują swoją teorię w ramach tak zwanego paradygmatu umysłu ucieleśnionego (*embodied mind paradigm*). Podstawowe założenia tego paradygmatu przedstawić można w spo-

---

[29] Por. badania prowadzone m.in. przez uczonych takich jak: L. Wynn, S.E. Antell, A.G. Cooper, D.P. Keating, E. van Loosbroek, A.W. Smitsman, E. Spelke, P. Starkey, B. Butterworth; dokładne odniesienia znaleźć można w: G. Lakoff, R. Núñez, *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York 2000, s. 15–16 oraz w podanej tam bibliografii.

[30] Zob. S. Dehaene, *The Number Sense. How the Mind Created Mathematics*, Revisted and Expanded Edition, Oxford University Press, Oxford-New York 2011.

[31] Zob. E. Spelke, *Natural Number and Natural Geometry*, [w:] *Space, Time and Number in the Brain. Searching for the Foundations of Mathematical Thought*, red. S. Dehaene, E. Brannon, Elsevier, London 2011, s. 287–317.

[32] Zob. G. Lakoff, R. Núñez, *Where Mathematics Comes From*, *op. cit*.

sób następujący. Idea ucieleśnienia sprowadza się do tezy, że umysł i poznanie są istotnie współkształtowane przez to, czego doświadcza ludzkie ciało w kontakcie ze środowiskiem. Podstawowe pojęcia (schematy) umysłowe tworzą się najprawdopodobniej na bazie neuronalnych programów kontroli motorycznej i wyrażają relacje przestrzenne. Jako że „takie schematy wyobrażeniowe (*image schemas*) ze swej natury mają charakter pojęciowy, mogą tworzyć złożone całości”[33]. Co więcej, ta umysłowa maszyneria potrafi tworzyć pojęcia abstrakcyjne na bazie pojęć konkretnych z wykorzystaniem metafor. Na gruncie paradygmatu umysłu ucieleśnionego metafory nie są rozumiane jako środki poetyckie – są one narzędziami „rozumienia i doświadczania jednego rodzaju rzeczy w kategoriach typowych dla innego rodzaju”[34]. Tak na przykład: doniosłość oddawana jest w kategoriach typowych dla wielkości („To wielka sprawa”; „To niewielki problem”), a trudność wyrażana jest kategoriach typowych dla określania ciężkości („Miałem ciężki tydzień”, „Ten egzamin był lekki”)[35]. Jak piszą Lakoff i Núñez:

> Każda metafora pojęciowa ma tę samą strukturę: stanowi odwzorowanie przedmiotów jednej dziedziny na przedmioty innej dziedziny. Jako takie, metafory pojęciowe są częścią naszego systemu myśli. Ich podstawową funkcją jest umożliwić nam rozumowanie o dziedzinach relatywnie abstrakcyjnych z użyciem struktury inferencyjnej charakterystycznej dla dziedziny relatywnie konkretnej[36].

Lakoff i Núñez twierdzą ponadto, że to właśnie mechanizm metaforyzacji pojęciowej umożliwia konstrukcję złożonych i precyzyjnych pojęć matematycznych. W przypadku arytmetyki postulują istnienie czterech podstawowych – ugruntowujących – metafor (*grounding metaphors*). Są to metafory, w których dziedziną docelową

[33] *Ibidem,* s. 39.
[34] *Ibidem*, s. 5.
[35] *Ibidem*, s. 41.
[36] *Ibidem*, s. 42.

jest zawsze elementarna arytmetyka, a dziedzinami źródłowymi: zbiór przedmiotów, konstrukcja przedmiotu, pomiar za pomocą pręta i ruch wzdłuż ścieżki[37]. W przypadku pierwszej z metafor odwzorowanie jednej z dziedzin (zbiór przedmiotów) w drugą (arytmetyka) ma przedstawiać się następująco:

• zbiór przedmiotów tej samej wielkości	→	liczby
• wielkość zbioru	→	wielkość liczby
• większy zbiór	→	większa liczba
• mniejszy zbiór	→	mniejsza liczba
• najmniejszy zbiór	→	liczba 1
• łączenie zbiorów	→	dodawanie
• odłączanie mniejszego zbioru od większego	→	odejmowanie

Lakoff i Núñez uważają, że te cztery metafory pozwalają na konstrukcję elementarnej arytmetyki. W tym ujęciu wychodzi się od wrodzonych zdolności do „radzenia sobie" z małymi liczbami (od 1 do 4). Ponadto dysponujemy doświadczeniami związanymi ze zbiorami przedmiotów, konstrukcją przedmiotów, fizyczną segmentacją i ruchem wzdłuż ścieżki. „Funkcjonując w świecie, łączymy wszystkie te pierwotne doświadczenia z naszymi wrodzonymi zdolnościami matematycznym"[38]. Doświadczenia te powiązane są z czterema podstawowymi metaforami w ten sposób, że stają się one źródłem metafor, których dziedziną docelową jest arytmetyka[39]. Lakoff i Núñez twierdzą, że ten sam mechanizm tłumaczy pojawienie się bardziej złożonych pojęć matematycznych, takich jak algebra, logika, teoria mnogości, liczby rzeczywiste itd.

Teoria Lakoffa i Núñeza jest niewątpliwie bardzo spekulatywna i można ją krytykować na różne sposoby[40]. Nie zmienia to jednak

[37] *Ibidem*.
[38] *Ibidem*, s. 93.
[39] *Ibidem*, s. 95–96.
[40] Zob. np. prace Jerzego Pogonowskiego: *Geneza matematyki wedle kognitywistów*, „Investigationes Linguisticae" 2011, XXIII, s. 106–14 oraz *Matematyczne metafory kognitywistów*, „LVIII Konferencja Historii Logiki", Kraków 2012, <http://www.logic.amu.edu.pl/images/0/0e/Mmk2012.pdf>.

faktu, że autorzy ci jako jedyni proponują hipotezę wyjaśniającą przejście od wrodzonej proto-matematyki do matematyki „pełnokrwistej". Co więcej, pokazują, jak dostać się do „raju Cantora", zaczynając od pojęć *konkretnych*, co jest spójne z opisywanymi w literaturze scenariuszami onto- i filogenetycznymi.

2.3. Matematyka i imitacja

Teoria Lakoffa i Núñeza ma pewną istotną słabość. Choć (mniej lub bardziej udanie) tłumaczy, jak pojęcia konkretne mogą dać asumpt do powstania abstrakcyjnych pojęć matematyki, nie wyjaśnia zaskakującej stabilności wiedzy matematycznej. By sformułować takie wyjaśnienie, trzeba, naszym zdaniem, zwrócić uwagę na fakt, że matematyka jest nie tylko ucieleśniona, ale także osadzona (*embedded*) w praktykach społecznych. W książce *Kulturowe źródła ludzkiego poznawania* Michael Tomasello rozważa zagadkę bardzo szybkiej ewolucji wytworów kultury, takich jak skomplikowane narzędzia i symbole, zaawansowane formy komunikacji czy złożone instytucje społeczne[41]. Jego zdaniem sześć milionów lat, które oddziela ewolucję istot ludzkich od innych prymatów, to zdecydowanie zbyt krótki okres, by zdolności te powstały w drodze doboru naturalnego, tym bardziej że pokrewieństwo genetyczne człowieka i szympansa wynosi około 99%, czyli tyle, ile w przypadku innych blisko spokrewnionych gatunków (na przykład lwów i tygrysów). Tomasello upatruje unikalności ludzkich zdolności kulturotwórczych w jednej cesze, która różni człowieka od innych naczelnych:

> w przypadku zdolności poznawczych dziedzictwo biologiczne człowieka jest bardzo podobne do wyposażenia innych naczelnych. Jedyną

[41] Zob. M. Tomasello, *Kulturowe źródła ludzkiego poznawania*, przeł. J. Rączaszek, PIW, Warszawa 2002.

istotną różnicą jest to, iż ludzie głębiej utożsamiają się z członkami swojego gatunku niż inne naczelne[42].

Na podstawie badań z zakresu biologii ewolucyjnej, antropologii, prymatologii oraz psychologii rozwojowej Tomasello formułuje hipotezę, zgodnie z którą w toku ewolucji biologicznej człowiek wytworzył unikalną *formę poznania społecznego*, która umożliwiła *kumulatywną ewolucję kulturową*. Proces ewolucji kulturowej związany jest z tak zwanym *efektem zapadki* (*the ratchet effect*):

> Proces kumulatywnej ewolucji kulturowej opiera się nie tylko na inwencji twórczej, ale – w nie mniejszym stopniu – na wiernym przekazie społecznym, który funkcjonuje jak „zapadka", nie pozwalając cofnąć się do poprzednich stadiów. W ten sposób nowo powstały czy zmodyfikowany wytwór lub praktyka kulturowa zachowują osiągniętą formę, przynajmniej w przybliżeniu, dopóki nie zdarzy się kolejna modyfikacja czy ulepszenie. Zaskakujące jest to, że dla wielu gatunków zwierząt problemem nie jest składnik twórczy, lecz właśnie składnik stabilizujący, utrwalający wytwory, stanowiący ową „zapadkę". Wiele osobników należących do gatunków naczelnych innych niż ludzie jest zdolnych do tworzenia inteligentnych innowacji, lecz inne osobniki z ich gatunku nie angażują się w taki rodzaj uczenia się społecznego, który umożliwiałby działanie kulturowej „zapadki" w czasie historycznym[43].

Dokładniej rzecz ujmując, hipoteza Tomasello posiada trzy wymiary. W *wymiarze filogenetycznym* podkreśla on, że *Homo sapiens* osiągnął niespotykaną u innych gatunków zdolność do utożsamiania się z innymi osobnikami własnego gatunku, co z kolei doprowadziło do postrzegania innych ludzi jako istot świadomych, intencjonalnych i obdarzonych umysłem. Ta niespotykana u innych zwierząt umiejętność stanowi podstawę zdolności do *imitacji*. W *wymiarze hi-*

---

[42] *Ibidem*, s. 23.
[43] *Ibidem*, s. 12.

storycznym zapadka kulturowa doprowadziła do powstania nowych form uczenia się przez imitację, co sprawiło, że ludzie przekazują sobie swoje odkrycia z pokolenia na pokolenie. Z kolei w *wymiarze ontogenetycznym*, Tomasello podkreśla, że dzieci rodzą się i wzrastają w ukształtowanej i stabilnej rzeczywistości kulturowej i społecznej. Dzięki temu nie muszą one odkrywać wszystkich wytworów kulturowych na nowo, przyswajając je na drodze imitacji[44].

Badania prowadzone przez Tomasella i jego współpracowników w Instytucie Maxa Plancka w Lipsku oraz liczne obserwacje terenowe wskazują, że u naczelnych innych niż człowiek (*non-human primates*) nie występuje *celowe nauczanie*. Zaobserwowano wprawdzie, że wśród naczelnych powszechna jest *emulacja* – mamy z nią do czynienia, gdy emulujący zainteresowany jest nie samym zachowaniem, czyli dokładną sekwencją ruchów, ale jego *celem*, czyli zmianami w środowisku wywołanymi przez zachowanie. Nie zaobserwowano jednak *naśladownictwa* czy też *imitacji* – mamy z nią do czynienia, gdy uwaga naśladującego jest nakierowana nie tylko na cel, ale również na samo zachowanie, czyli konkretną sekwencję ruchów[45]. Hipoteza ta może wydawać się kontrintuicyjna aż do momentu, gdy zdamy sobie sprawę, że ze względu na szczegółowość zachowań *ścisła* imitacja wymaga zaangażowania znacznie większych zasobów kognitywnych (na przykład pamięci i uwagi), niż w przypadku emulacji. Zdaniem Tomasella, a także innych badaczy, takich jak Merlin Donald, to właśnie specyficznie ludzka zdolność do imitacji sprzyja procesowi celowego i intencjonalnego nauczania, który umożliwia trwanie i rozwój stabilnego świata kultury[46].

---

[44] *Ibidem*, s. 10.

[45] Inni prymatolodzy zaobserwowali jednak zachowania imitacyjne u prymatów innych niż człowiek, zob. *The Primate Mind. Built to Connect with Other Minds*, red. F. de Waal, P.F. Ferrari, Harvard University Press, Cambridge 2012. Nie podważa to jednak tezy Tomasello, gdyż ten – ściśle rzecz biorąc – mówi nie tyle o samej *zdolności*, ale *tendencji* do imitacyjnego przekazu kultury.

[46] Por. M. Donald, *Imitation and Mimesis*, [w:], *Perspectives on Imitation vol. 2: Imitation, Human Development, and Culture*, red. S. Hurley, N. Chater, MIT Press, Cambridge, Mass. 2005, s. 283–300.

Elementem świata kultury jest oczywiście matematyka. Tomasello zauważa:

> Historia matematyki jest dziedziną, w której szczegółowe badania ujawniły tysiące skomplikowanych sposobów, w jakie jednostki oraz ich grupy przejmują to, co pozostawiają poprzednie generacje, a następnie dokonują modyfikacji, by skuteczniej sprostać nowym potrzebom praktycznym i teoretycznym (…). Według mojej hipotezy (…), bazując na podstawowej intuicji liczby, ludzie używają swych niezwykłych zdolności do przyjmowania różnych perspektyw i tworzenia alternatywnych sposobów rozumienia konkretnych przedmiotów oraz zbiorów przedmiotów (zdolności te mają z kolei korzenie w społecznych umiejętnościach przyjmowania perspektywy innych jednostek i komunikacji językowej) i w ten sposób tworzą złożoną matematykę[47].

Tomasello tłumaczy też relatywnie małą różnorodność systemów matematycznych:

> (…) różnice między kulturami są dużo wyraźniejsze w przypadku języków mówionych. Wszystkie kultury mają bowiem bardzo złożone systemy komunikacji językowej (…), podczas gdy tylko niektóre wytworzyły wysoce złożone systemy matematyczne (w dodatku „praktykowane" tylko przez niektórych ich członków). Inne kultury zadowalają się prostymi systemami liczenia (…). [Dlatego] żaden teoretyk nie sądzi, iż struktura złożonej matematyki współczesnej wynika z posiadania wrodzonego modułu, jak to się zdarzało w przypadku języka[48].

Powyżej zarysowany szkicowy obraz onto- i filogenezy matematyki podsumować można, stwierdzając, że matematyka jest wrodzona

---

[47] M. Tomasello, *Kulturowe źródła ludzkiego poznawania*, *op. cit.*, s. 65–66.
[48] *Ibidem*, s. 64.

(*embrained*, by użyć neologizmu), ucieleśniona (*embodied*) i osadzona w interakcjach społecznych (*embedded mathematics*), gdzie:

- ***embrainded matematics*** to wrodzone lub nabyte we wczesnym dzieciństwie zdolności proto-matematyczne, takie jak intuicja mnogości i zmysł liczby;
- ***embodied mathematics*** to oparty na funkcjonowaniu systemu sensoryczno-motorycznego i mechanizmie metaforyzacji system pojęć abstrakcyjnych, zbudowanych na bazie pojęć konkretnych;
- ***embedded mathematics*** to określony zbiór pojęć i metod matematycznych, który dzięki specyficznie ludzkiej zdolności do imitacji i mechanizmowi „zapadki kulturowej" został wytworzony w czasie historycznym, jest przekazywany z pokolenia na pokolenie i wykazuje dużą stabilność, choć oczywiście jest rozwijany i modyfikowany.

* * *

Naszym zdaniem taka koncepcja matematyki wpisuje się w zaprezentowane powyżej odróżnienie reguł rudymentarnych i abstrakcyjnych. Choć istnieją wrodzone, elementarne zdolności matematyczne, droga do „pełnokrwistej" matematyki wiedzie przez język. Co więcej język nie jest tu rozumiany jako izolowane przystosowanie ewolucyjne, ale część większej całości – zbioru przekazywanych społecznie, wieloaspektowych wzorów zachowania, które pojawiły się w procesie kumulatywnej ewolucji kulturowej dzięki ludzkiej zdolności do imitacji. Zatem matematyka – podobnie jak reguły językowe czy zasady moralne – bazuje na regułach rudymentarnych. Widać to jasno, gdy rozważymy ontogenezę: dzieci nie zaczynają od nauki abstrakcyjnych systemów aksjomatycznych, ale poprzez imitację praktyk społecznych, które mają „aspekt matematyczny". Scenariusz filogenetyczny jest podobny: nasze praktyki matematyczne wyrosły z szerszych praktyk społecznych. Przejście od rudymentarnego kierowania się regułą do matematyki, jaką znamy, było możliwe dzięki procesom uogólniania i aspektualizacji, które najpewniej wykorzystują mechanizm metaforyzacji opisany przez Lakoffa i Núñeza. Z kolei nasza zdolność i tendencja do imitacji zachowań innych członków społeczności sprawiła, że nasz matematyczny system pojęciowy stał się stabilny. Była to ciągle matematyka wyrażana w języku naturalnym – można spekulować, że odkrycie notacji symbolicznej zwiększyło zarówno stabilność jak i precyzję wiedzy matematycznej. Trzeba jednak pamiętać, że badania pokazują, iż elementarne formy kierowania się regułą – tak jak i język naturalny – są niezbywalne nawet w przypadku złożonych praktyk matematycznych. Rozwiązując problemy matematyczne, ludzie nie posługują się jedynie symbolami – kierują się raczej, często nieświadomie, wieloma prostymi regułami i używają języka naturalnego. Problem z uznaniem tego obrazu matematyki za prawdziwy bierze się stąd, że mamy inną *teorię matematyki*. Przeważający pogląd głosi, że matematyka to zbiór powiązanych ze sobą twierdzeń wyrażonych w języku symbolicznym, które w jakiś sposób wychwytują związki pomiędzy abstrakcyjnymi strukturami matematycznymi.

Pora wrócić do pytania o normatywność matematyki. W zarysowanej teorii matematyka jest normatywna w istotnym sensie: opiera się bowiem na systemie reguł rudymentarnych, które są *protonormatywne*. W tym samym sensie jednak normatywne są *wszystkie wytwory kultury* (język, prawo, moralność, fizyka). Proponowane przez nas ujęcie tłumaczy także, dlaczego o wiedzy matematycznej można mówić jako o pozbawionym charakteru normatywnego systemie deskryptywnych twierdzeń dotyczących abstrakcyjnych struktur (jak to ma miejsce w platonizmie), ale też jako o zbiorze reguł normatywnych w sensie kategorycznym (jak w formalizmie czy intuicjonizmie). Różne teorie matematyki stanowią różne konceptualizacje „matematycznego" aspektu reguł rudymentarnych. Na matematykę można spojrzeć po platońsku, ale można też pójść śladami Hilberta bądź Brouwera. Nie chcemy przez to powiedzieć, że zarysowana powyżej teoria matematyki, uwzględniająca wyniki neuronauki poznawczej, może rozstrzygnąć odwieczny spór w filozofii matematyki, sugerując, że spór ten toczy się wokół źle postawionego pytania; że ostatecznie ani platonizm, ani formalizm, ani intuicjonizm nie są prawdziwymi teoriami matematyki, bo taka prawdziwa teoria po prostu nie istnieje. Chcemy raczej stwierdzić, że to, co Michał Heller nazywa matematyką przez małe „m", to matematyka, która jest wrodzona (*embrained*), ucieleśniona (*embodied*) i osadzona (*embedded*) w interakcjach społecznych. Nie znaczy to natomiast, że dokonujemy jakichkolwiek rozstrzygnięć w odniesieniu do Matematyki przez duże „M"[49].

[49] Zob. M. Heller, *Co to znaczy, że przyroda jest matematyczna?*, [w:] *Matematyczność przyrody*, red. M. Heller, J. Życiński, Petrus, Kraków 2010, s. 15–16.